07.06.2018

Первый уровень.

1. Докажите неравенство: $\frac{1}{2} < \int\limits_0^{1/2} \frac{dx}{\sqrt{1-x^{2n}}} < \frac{\pi}{6}, \quad n \in \mathbb{N}$;

2. Докажите равенство: $\int\limits_0^1 \frac{\operatorname{arctg} x}{x}\,dx = \frac{1}{2}\int\limits_0^{\pi/2} \frac{t}{\sin t}\,dt.$

3. Исследуйте на сходимость интеграл $\int\limits_0^{+\infty} \frac{x^p}{e^x-1}\,dx$;

4. Представить положительное число a в виде суммы пяти положительных слагаемых так, чтобы их произведение имело наибольшее значение.

5. Исследовать на дифференцируемость

$$f(x;y) = 7 - 20x + 14y - \sqrt[3]{x^2y};$$

Второй уровень.

1. Исследовать несобственный интеграл на абсолютную и условную сходимость в зависимости от значений параметров α и β:

$$I(\alpha,\beta) = \int\limits_0^1 \frac{\cos\frac{1}{x}}{x^\alpha(1-x^2)^\beta}\,dx.$$

2. При каких значениях параметра α существует $v.p. \int\limits_0^2 \frac{x^\alpha}{1-x}\,dx$.

3. Пусть $f(x) = \begin{cases} \frac{\sin x}{x}, & x \neq 0, \\ 0, & x = 0 \end{cases}$, а $F(x) = \int\limits_{-1}^{x} f(t)dt$. Существует ли $F'(0)$ (если да, то чему равна, если нет, то почему)?

4. Привести пример функции $f(x,y)$, определённой в окрестности точки $(0,0)$, имеющей в каждой точке этой окрестности конечные частные производные по x и по y, но не являющейся непрерывной в $(0,0)$.

5. Найти расстояние между поверхностями $\frac{x^2}{96} + y^2 + z^2 = 1$ и $3x + 4y + 12z = 288$.

Третий уровень.

1. Привести пример функций $f(x)$ и $g(y)$ таких, что $f(x)$ интегрируема по Риману на сегменте $[a, b]$, $g(y)$ интегрируема на сегменте $[m, M]$, где $m = \inf\limits_{a \le x \le b} f(x)$, $M = \sup\limits_{a \le x \le b} f(x)$, но сложная функция $g(f(x))$ не интегрируема на $[a.b]$.

2. Привести пример функции $f(x, y)$, дифференцируемой в точке $(0, 0)$ и имеющей в этой точке разрывные частные производные по x и по y.